1.1 **a** *Mögliche Beobachtungen:*

- Beim Quadrat und beim Rechteck entstehen immer zwei gleiche, kongruente Dreiecke. Beim Drachen entstehen die beiden kongruenten Dreiecke nur bei einer der beiden Diagonalen.

- Dreiecke der gleichen Dreiecksart:
  Es entstehen immer…

beim Quadrat:	zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke
beim Rechteck:	zwei ungleichseitig rechtwinklige Dreiecke
beim Parallelenviereck je nach Diagonale:	zwei ungleichseitig stumpfwinklige Dreiecke zwei ungleichseitig spitzwinklige Dreiecke
beim Rhombus je nach Diagonale:	zwei gleichschenklig stumpfwinklige Dreiecke zwei gleichschenklig spitzwinklige Dreiecke
beim Drachen mit der Diagonalen, welche die andere halbiert:	zwei ungleichseitig spitz-, recht- beziehungsweise stumpfwinklige Dreiecke

b *Zum Tüfteln:*

Hinweis:
Es sind Beispiel-Vierecke angegeben. Die Bedingungen, die sie erfüllen müssen, sind mit Stichworten beschrieben und mit Zeichen markiert.
Die entsprechenden Diagonalen sind eingezeichnet: ———

Drachen *Trapez*

ungleichseitig spitzwinkliges Dreieck

gleichschenklig spitzwinkliges Dreieck

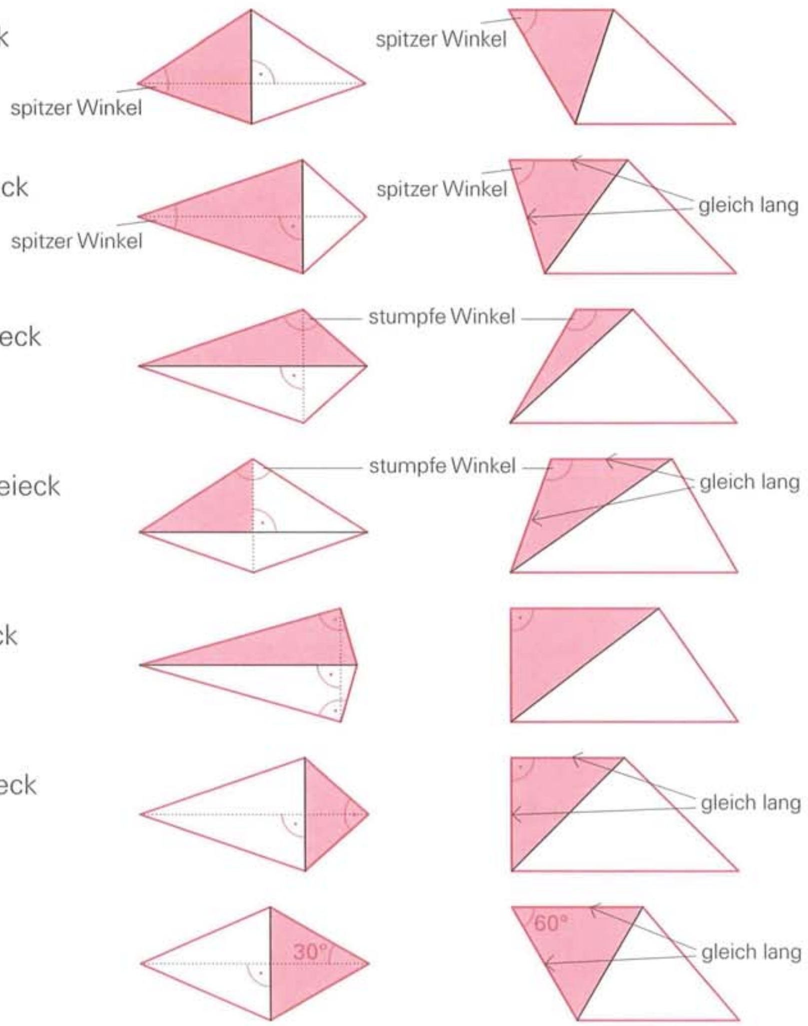
ungleichseitig stumpfwinkliges Dreieck

gleichschenklig stumpfwinkliges Dreieck

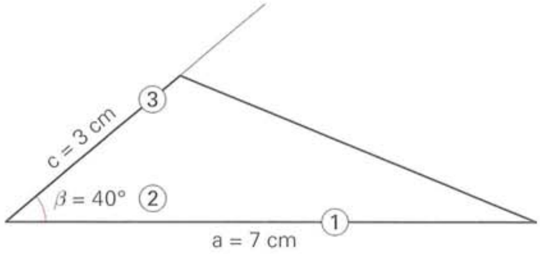
ungleichseitig rechtwinkliges Dreieck

gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck

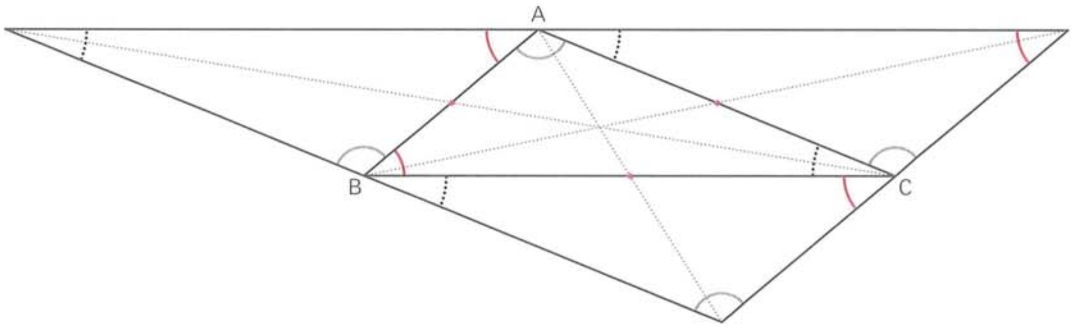
gleichseitiges Dreieck



2.1 **a** *Hinweis:*
Konstruktionsreihenfolge ① → ② → ③

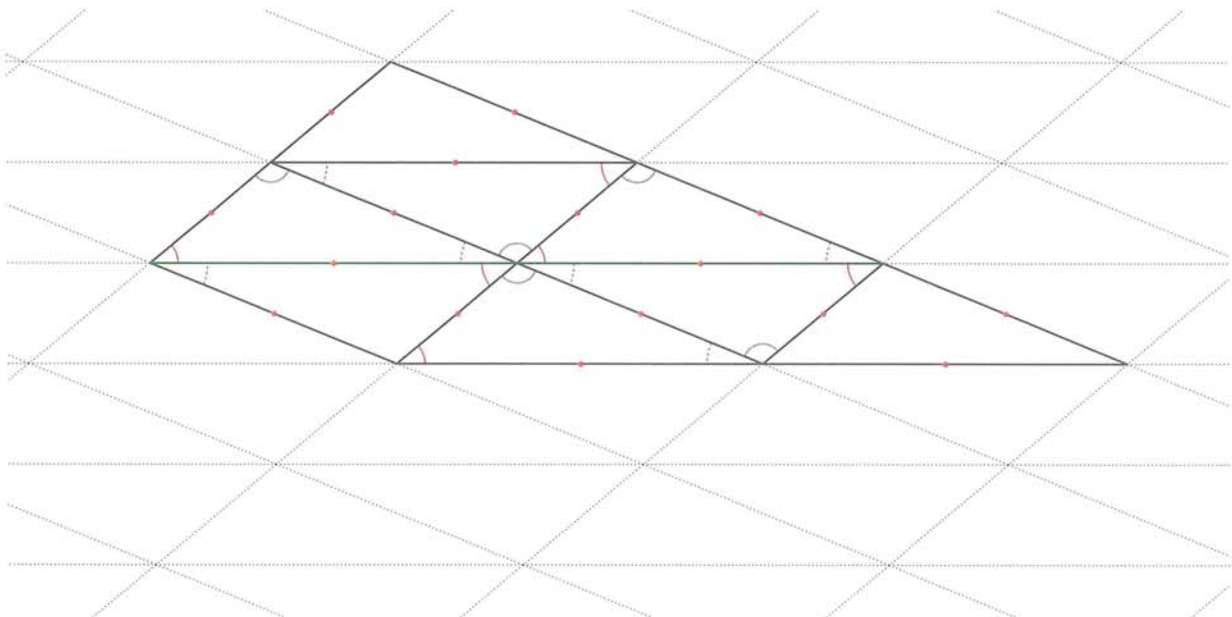


b

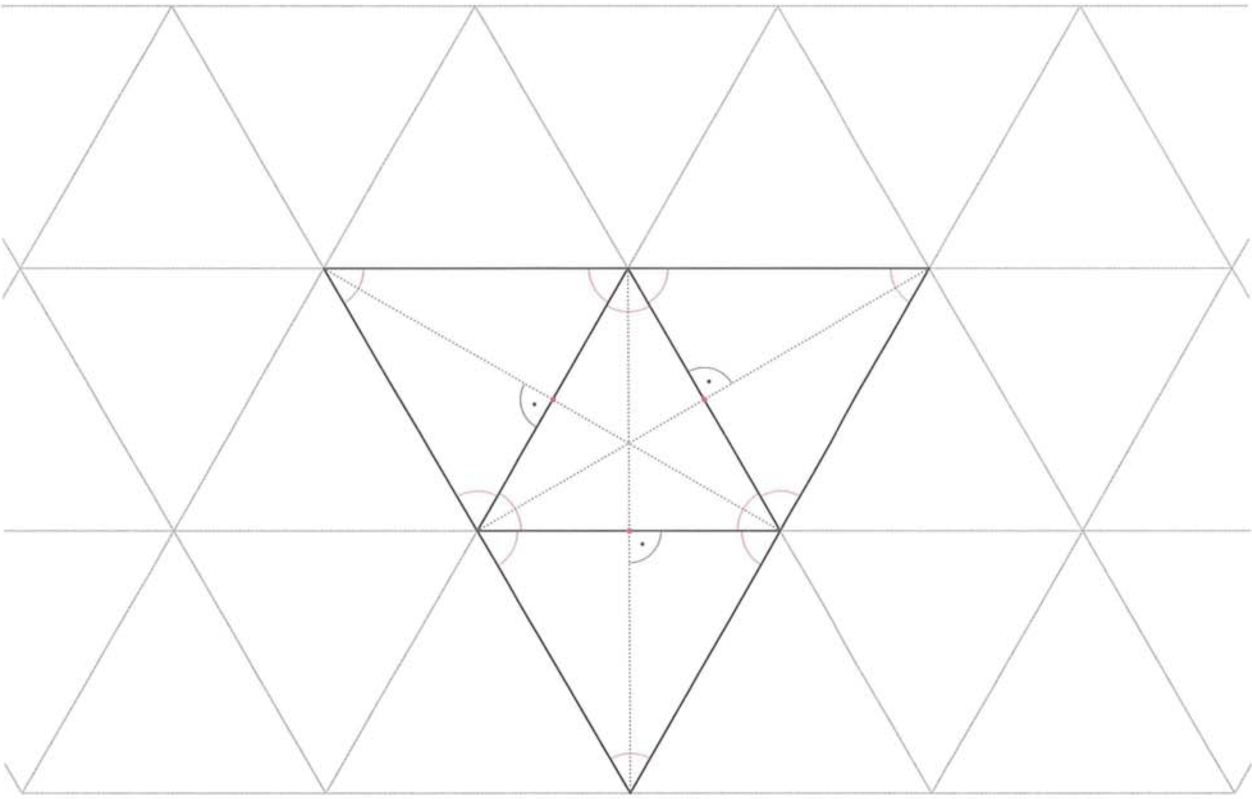


c *Mögliche Antwort:*
Bei A, B und C stossen immer alle drei Winkel des Dreiecks zusammen und es bildet sich eine Gerade. Der Grund dafür ist die Punktspiegelung: gespiegelte Geraden sind parallel.
Darum ist die Summe der drei Winkel im Dreieck gleich 180°.

d *Hinweise:*
- Die Darstellung hier ist verkleinert wiedergegeben.
- Man kann ausnützen, dass die Punktspiegelungen der Dreiecke Geraden entstehen lässt.
- Es entsteht ein Dreiecksparkett.



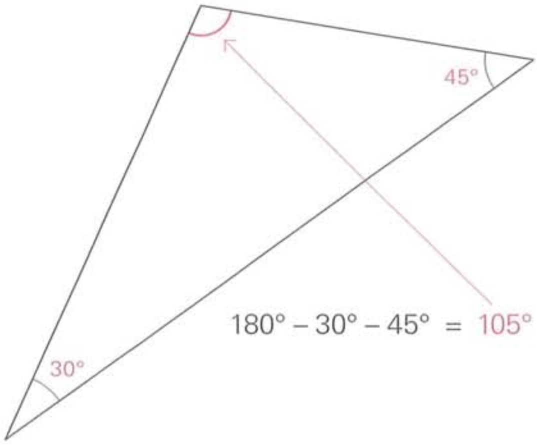
2.2 a, b

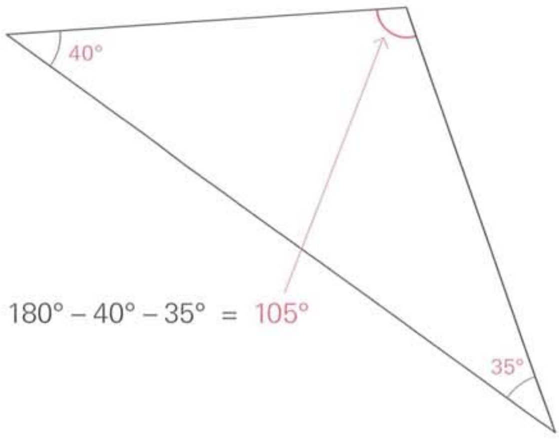


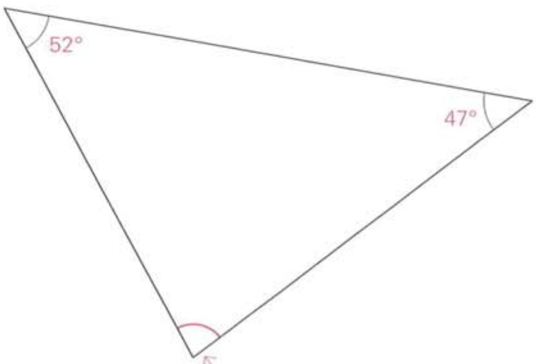
c *Mögliche Antwort:*
Statt punktspiegeln an den Seitenmittelpunkten könnte man das Dreieck an jeder Dreiecksseite achsenspiegeln. Das führt zur gleichen Figur, weil die Verbindungsgeraden zweier punktsymmetrischer Ecken senkrecht auf den Seiten des Dreiecks stehen.

d *Mögliche Begründung:*
Alle drei Winkel im gleichseitigen Dreieck sind gleich gross und messen 60°.
Grund:
Im Parkett sieht man, dass drei Winkel zusammen einen Winkel von 180° bilden (sie liegen an einer Gerade). Also misst jeder Winkel 180° : 3 = 60°.

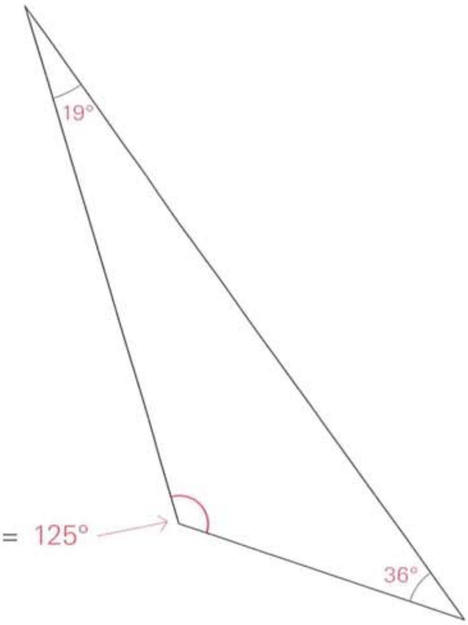
2.3







180° – 47° – 52° = 81°



180° – 19° – 36° = 125°

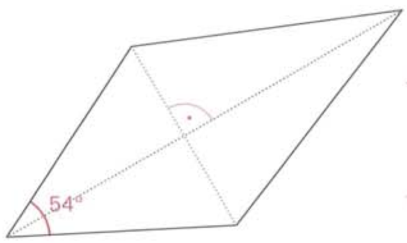
2.4 **a** 90°: Das Dreieck ist rechtwinklig.
180° – 90° – 64° = 26°

b 180° – 2 · 43° = 94°
Gleichschenklig stumpfwinkliges Dreieck

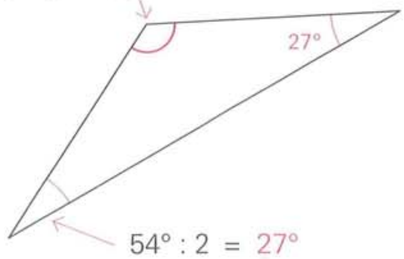
c (180° – 48°) : 2 = 66°
Gleichschenklig spitzwinkliges Dreieck

d *Hinweis:*
- Es entstehen zwei verschiedene Dreiecke je nach Wahl der Diagonalen.
- Die Winkel lassen sich auf verschiedene Weise berechnen.

Skizzen:

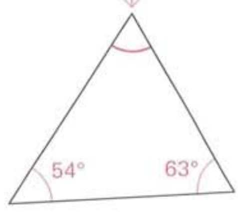


180° – (27° · 2) = 126°
oder auch: 63° · 2 = 126°



54° : 2 = 27°

(180° – 54°) : 2 = 63°
oder auch: 126° : 2 = 63°

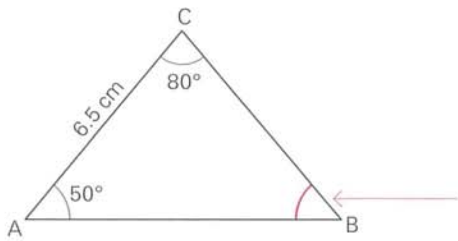


Die Dreiecke sind gleichschenklig stumpfwinklig beziehungsweise gleichschenklig spitzwinklig.

e $a = b = 5$ cm: → Es muss ein gleichschenkliges Dreieck sein.
$\gamma = 60°$: → Das Dreieck ist sogar gleichseitig.
Darum messen alle Winkel 60° und alle Seiten sind 5 cm lang, also auch $c = 5$ cm.

f $\sphericalangle CAB = 48° = \alpha$
$\sphericalangle BCA = 53° = \gamma$
$\beta = \sphericalangle ABC = 180° - 48° - 53° = 79°$
Es ist ein ungleichseitig spitzwinkliges Dreieck.

g *Skizze:*



$180° - 50° - 80° = 50°$

$\beta = \sphericalangle ABC = 50° = \alpha$ (Das heisst, das Dreieck ist gleichschenklig.)
$\overline{AC} = \overline{BC} = 6.5$ cm (Denn das Dreieck ist gleichschenklig.)

Dreieckswinkel

2.5 *Zum Tüfteln:*

a Summe der Aussenwinkel

- in einem Dreieck: 360°
- in einem Viereck: 360°
- in einem beliebigen n-Eck: 360°

b regelmässiges Dreieck: gleichseitiges Dreieck

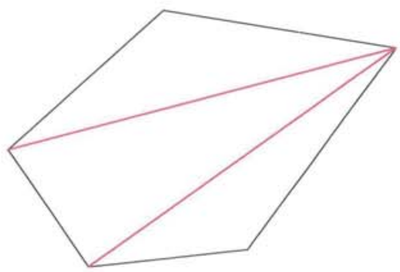
regelmässiges Viereck: Quadrat

c Aussenwinkel: 360° : n, denn alle Winkel in einem regulären n-Eck sind gleich gross.

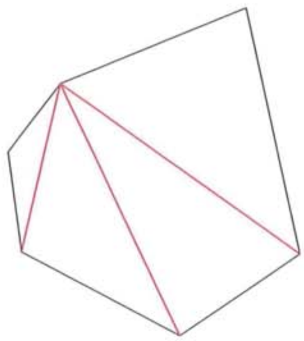
- regelmässiges Fünfeck: $360° : 5 = 72°$ (Innenwinkel: $180° - 72° = 108°$)
- regelmässiges Sechseck: $360° : 6 = 60°$ (Innenwinkel: $180° - 60° = 120°$)
- regelmässiges Siebeneck: $360° : 7 = 51.428571428571...° \approx 51°$ (Innenwinkel: ~ 129°)
- regelmässiges n-Eck: $\frac{360°}{n} = 360° : n$ $\left(\text{Innenwinkel: } 180° - (360° : n) = 180° - \frac{360°}{n}\right)$

d *Mögliches Vorgehen:*

Beispiel eines Fünfecks



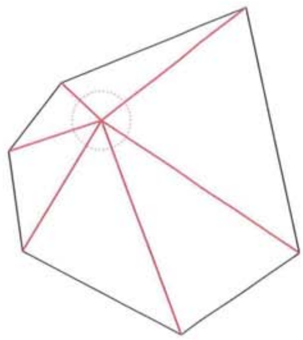
Beispiel eines Sechsecks



Durch alle Diagonalen von einer Ecke aus entstehen:
- bei einem Fünfeck 3 Dreiecke,
- bei einem Sechseck 4 Dreiecke,
- bei einem n-Eck zwei Dreiecke weniger, als das n-Eck Ecken aufweist.

(Innen-)Winkelsumme:
- beim Fünfeck: $3 \cdot 180° = 540°$
- beim Sechseck: $4 \cdot 180° = 720°$
- beim n-Eck: $(n-2) \cdot 180°$

Anmerkung:
Wenn man irgendwo im Inneren des n-Ecks einen beliebigen Punkt wählt und ihn mit allen Ecken verbindet, entstehen dadurch n Dreiecke.
Die Winkelsumme des n-Ecks ist dann $n \cdot 180° - 360°$.
(360°: Die Summe der beim gewählten Punkt zusammenstossenden Dreieckswinkel).



e Bedeutung beim n-Eck:

- $n \cdot 180° - A$ (Innen-)Winkelsumme, Grund: Weil $A = 360°$ ist, gilt
  $n \cdot 180° - 360° = n \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (n-2)\,180°$

- $(n-2) \cdot D$ (Innen-)Winkelsumme, Grund: Weil $D = 180°$ (siehe auch Aufgabe d)

f Bedeutung beim regelmässigen n-Eck:

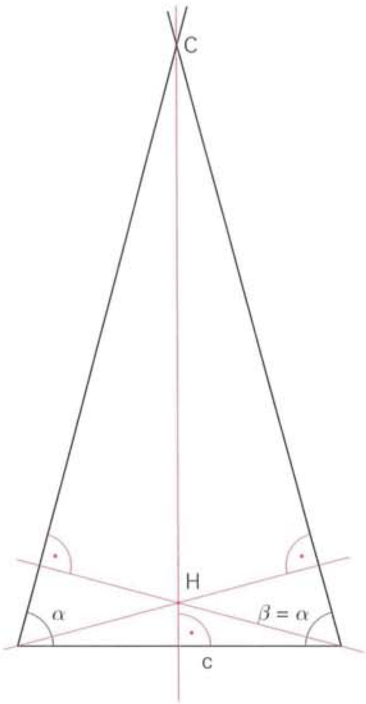
- $180° - \frac{360°}{n}$ 180° minus Aussenwinkel gleich Innenwinkel

- $\frac{n \cdot 180° - 360°}{n}$ Zähler: (Innen-)Winkelsumme (siehe Aufgabe e)
  Bedeutung des Bruchs: Innenwinkel

- $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ Zähler: (Innen-)Winkelsumme (siehe Aufgabe e)
  Bedeutung des Bruchs: Innenwinkel

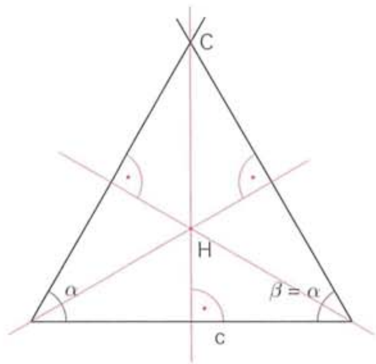
3.1 *Hinweis:*
Die Zeichnungen sind auf die Hälfte verkleinert wiedergegeben.

a



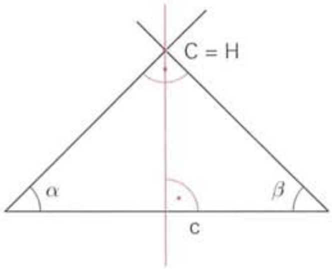
gleichschenklig spitzwinkliges Dreieck

b



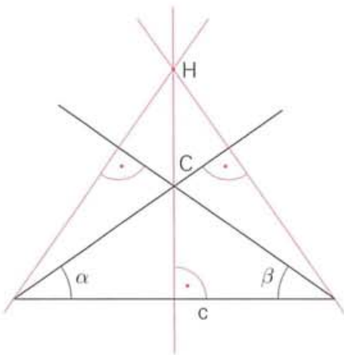
gleichseitiges Dreieck

c



gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck

d



gleichschenklig stumpfwinkliges Dreieck

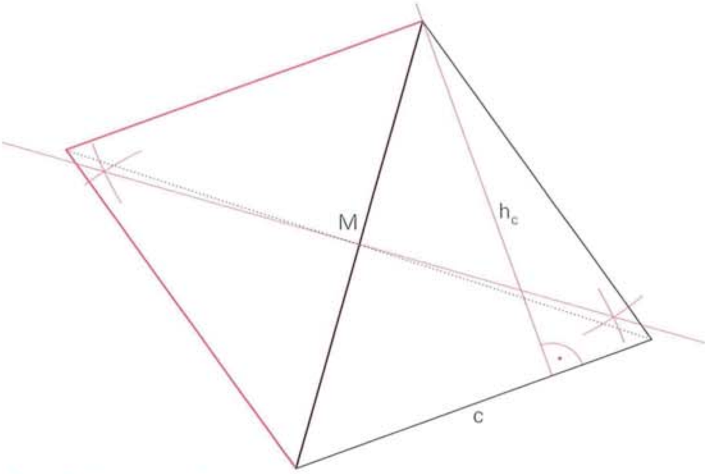
e Dreiecksart: Siehe oben bei den Lösungen zu den Aufgaben a bis d.

Mögliche Antwort:
Alle vier Ecken C müssten auf der Mittelsenkrechten zur Seite c liegen. Auf dieser Mittelsenkrechte liegt auch die Höhe h_c.

Siehe Lösung unter «Extras»

Höhen im gleichschenkligen Dreieck

4.1 **a** *Mögliche Zeichnung:*

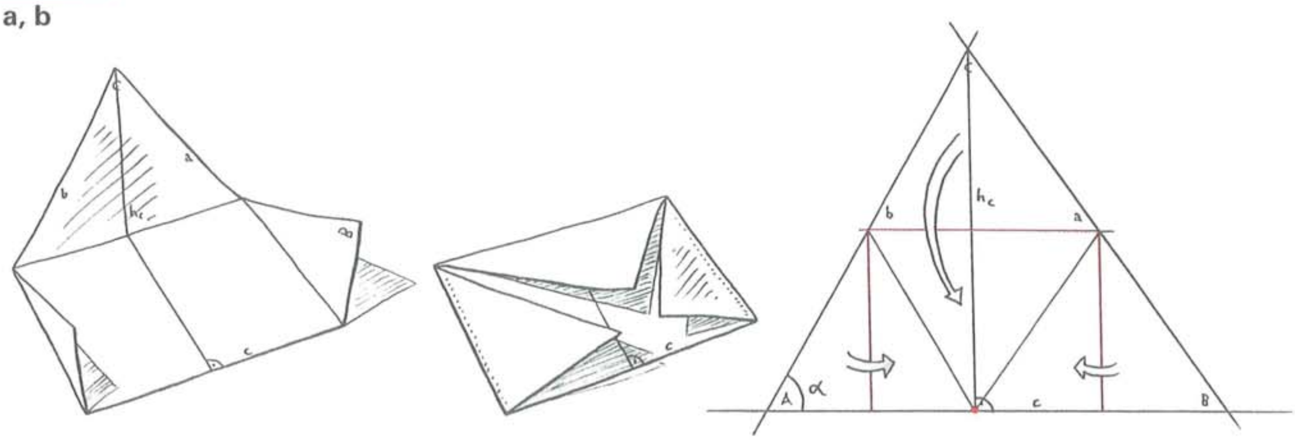


b – Es entsteht ein Parallelenviereck.

– *Mögliche Begründung:*
Die Fläche des Parallelenvierecks berechnet man aus «Seite mal zugeordnete Höhe»,
hier zum Beispiel $c \cdot h_c$.
Die Fläche des Parallelenvierecks entspricht der doppelten Dreiecksfläche
(Grund: Punktspiegelung).

Daher beträgt die Dreiecksfläche $A = (c \cdot h_c) : 2 = \frac{c\,h_c}{2}$

4.2 **a, b**



c *Mögliche Antworten:*

– Es entsteht ein Rechteck.
Es weist die halbe Fläche des Dreiecks auf (doppelte Lage Papier).

Rechteckflächeninhalt: $\frac{c}{2} \cdot \frac{h_c}{2}$

Doppelter Rechteckflächeninhalt oder

Dreiecksflächeninhalt: $2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{h_c}{2} = c \cdot \frac{h_c}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

– Beim Höhenfusspunkt kommen die Scheitelpunkte der drei Winkel des Dreiecks zusammen
und bilden eine Gerade, also einen 180°-Winkel.
Darum beträgt die Winkelsumme im Dreieck 180°.

4.3 **a** $A = 8.05\ \text{cm}^2$

b $h_c = 14\ \text{cm}$

c $A = 1472\ \text{mm}^2 = 14.72\ \text{cm}^2$

d $b = 2.48\ \text{cm}$

e $h_b = 8.4878048780487\ldots\ \text{cm} \approx 8.5\ \text{cm} = h_c$
(Denn im gleichseitigen Dreieck sind alle Höhen gleich lang.)

f $A = 17.75\ldots\ \text{cm}^2 \approx 18\ \text{cm}^2$
(Denn in diesem gleichschenkligen Dreieck ist $h_a = h_b$.)

g $c = 10\ \text{cm}$

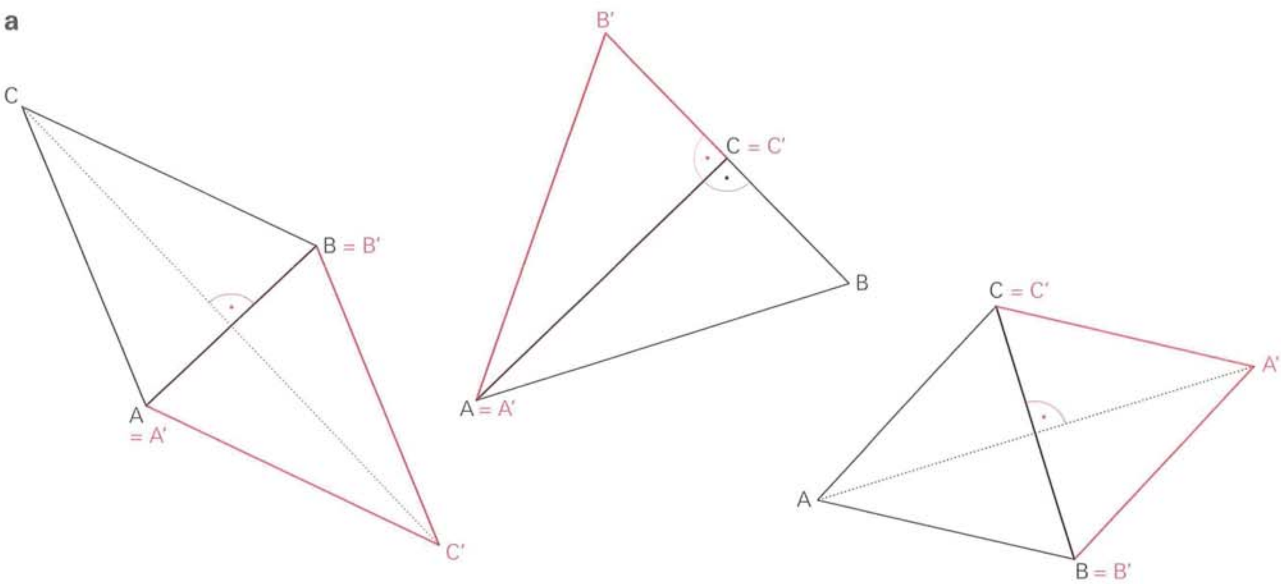
Dreiecksflächenberechnung

4.4 Siehe Lösung unter «Extras»

Flächenberechnung im Dreieck
Untersuchungen mit Dreiecksflächen
Gleichschenklige Dreiecke
Rechtwinklige Dreiecke
Flächenbestimmung alternativ

4.5 *Zum Tüfteln:*

a



b Rhombus

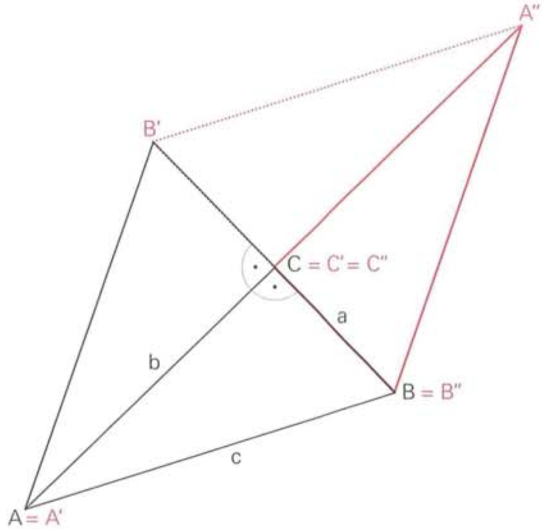
gleichschenkliges Dreieck

Rhombus

c *Mögliche Begründung:*
Die Fläche des Rhombus kann man aus den beiden Diagonalen berechnen:
«Diagonale mal Diagonale durch 2». Das ist die doppelte Dreiecksfläche.
Die eine Diagonale ist die Seite des Dreiecks, die Hälfte der anderen die zugeordnete Höhe, denn die Diagonalen im Rhombus stehen senkrecht aufeinander.

Kurz:
Rhombusfläche: $\frac{\text{Diagonale} \cdot \text{Diagonale}}{2} = \text{Diagonale} \cdot \frac{\text{Diagonale}}{2} = \text{Seite} \cdot \text{Höhe}$ (doppelte Dreiecksfläche)

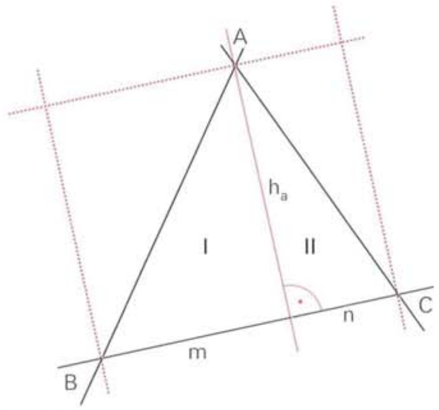
d *Mögliche Begründung:*
Verbindet man zusätzlich B' mit A'', so entsteht ein Rhombus mit Seitenlänge c. Er ist viermal so gross wie das rechtwinklige Dreieck.
Sein Flächeninhalt lässt sich aus den beiden Diagonalen berechnen:
«Diagonale mal Diagonale durch 2».
Die Diagonalen sind aber doppelt so lang wie die beiden Dreiecksseiten a und b.



Kurz:
Dreiecksfläche: Rhombusfläche : 4 $= \frac{\text{Diagonale} \cdot \text{Diagonale}}{2} : 4 = \frac{2a \cdot 2b}{2} : 4 = \frac{a \cdot b}{2}$

4.6 *Zum Tüfteln:*

a



b Beides sind rechtwinklige Dreiecke.
Ihre Fläche lässt sich mit den Längen der beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden, berechnen.

Term für die Fläche I: $\frac{m \cdot h_a}{2}$

Term für die Fläche II: $\frac{n \cdot h_a}{2}$

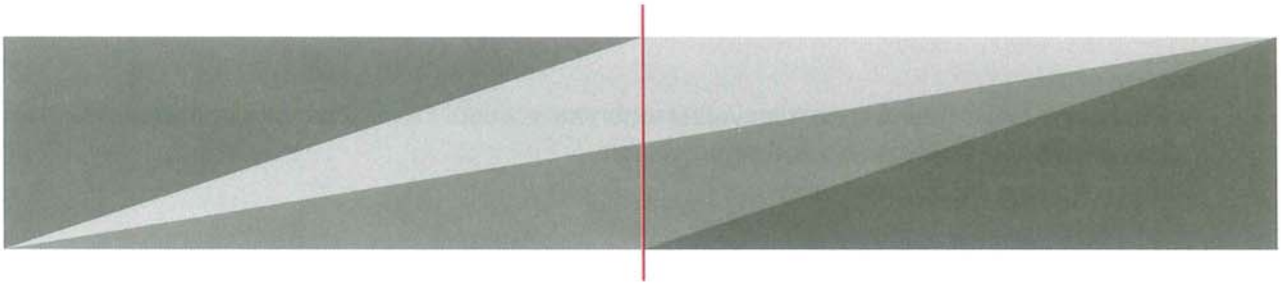
Summe: $\frac{m \cdot h_a}{2} + \frac{n \cdot h_a}{2} = \frac{(m + n) \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$

Anmerkungen:
- *Dies ist eine weitere Methode zu zeigen, wie man die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks herleiten kann; die beiden Terme erhält man aus den Ergänzungen zu Rechtecken:*
- *Statt den Bruchterm umzuformen, könnte man auch die Divisonsschreibweise für die Brüche verwenden und den Divisor 2 ausklammern.*

5.1 **a** $A = 9600\ \text{cm}^2 = 0.96\ \text{m}^2 \approx 1\ \text{m}^2$

b *Mögliche Antwort:*
Das Wort «quantum» hängt mit dem Wort «Quantität» zusammen, was so viel wie «Menge, Anzahl» bedeutet.
Jede der vier Farbflächen soll *gleich gross* sein.

Überprüfung:

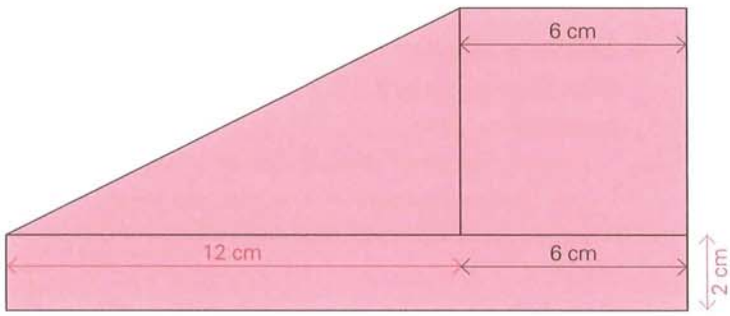


Die rote Verbindungsgerade ist parallel zum Bildrand und halbiert die Bildlänge. Alle vier Dreiecke haben daher eine Seite, die halb so lang ist wie das Bild. Die zugeordnete Höhe entspricht der Bildbreite.
Darum sind die vier «farbquanten» flächeninhaltsgleich. Ihre Fläche ist je ein Viertel der Bildfläche, also ungefähr $\frac{1}{4}\ \text{m}^2$.

6.1 **a** Flächeninhalt jeder der drei Flächen: $6\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} = 36\ \text{cm}^2$

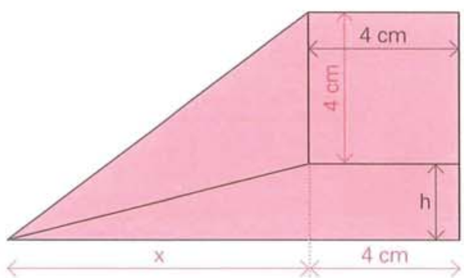
Damit lässt sich eine weitere Seite des Dreiecks bestimmen:
$A = (x\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm}) : 2 = 36\ \text{cm}^2$,
also 12 cm

Für das Rechteck gilt:
$A = y\ \text{cm} \cdot 18\ \text{cm} = 36\ \text{cm}^2$,
also ist es 2 cm breit.



b Flächeninhalt jeder der drei Flächen:
$4\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = 16\ \text{cm}^2$
Im Dreieck ist x die zugeordnete Höhe zur Seite von 4 cm Länge.

$A = (x\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}) : 2 = 16\ \text{cm}^2$,
also ist $x = 8$ cm.



Das Trapez hat 2 Parallelen der Längen
4 cm und $(x\ \text{cm} + 4\ \text{cm}) = 12\ \text{cm}$
Mittellinie: $m = (12\ \text{cm} + 4\ \text{cm}) : 2 = 8\ \text{cm}$
Fläche: $A = m \cdot h = 8\ \text{cm} \cdot h\ \text{cm} = 16\ \text{cm}^2$,
somit ist $h = 2$ cm.

6.2 **a** Pyramide mit quadratischer Grundfläche

b Die Oberfläche besteht aus

– 1 Quadrat:	14^2 cm^2 = 196 cm^2
– 4 gleichschenkligen Dreiecken:	4 · (25 cm · 14 cm) : 2 = 700 cm^2
Oberfläche total:	896 cm^2

6.3 **a** –

b *Hinweis:*
Die Fläche eines Steins kann man verschieden berechnen. Die Fläche wird immer aus rechteckigen und dreieckigen Teilflächen zusammengesetzt.
Hier wird eine Möglichkeit gezeigt.

Fläche eines Steins:

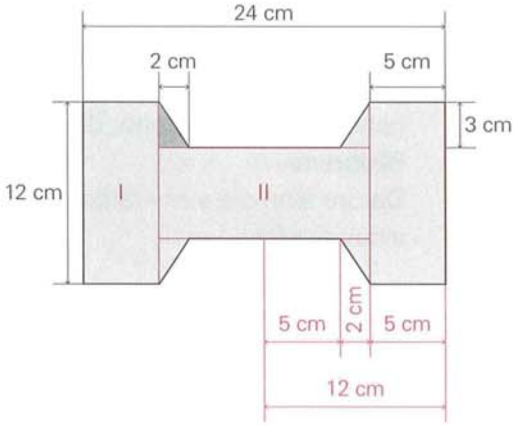
2 Rechtecke I: 2 · 5 cm · 12 cm = 120 cm^2

1 Rechteck II: (24 – 2· 5) cm · (12 – 2 · 3) cm = 84 cm^2

4 Dreiecke : 4 · ((3 cm · 2 cm) : 2) = 12 cm^2

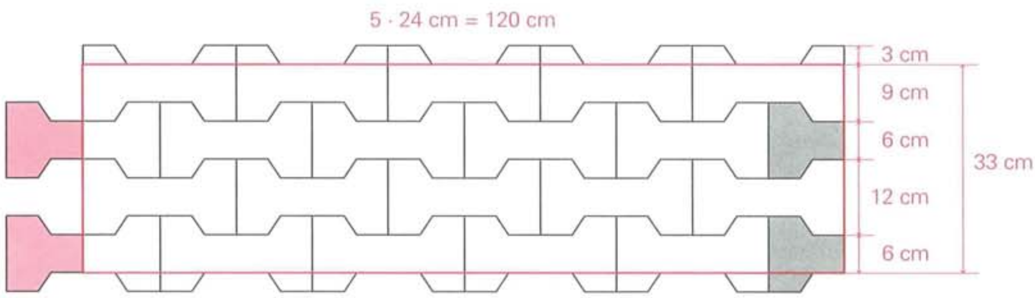
Total: 216 cm^2

Fläche von 20 Steinen:
4320 cm^2 = 0.432 m^2



c *Mögliche Überlegungen:*
Der Gärtner muss kräftig aufrunden, wenn er zum Beispiel einen vorgegebenen rechteckigen Platz parkettieren soll:
- An den Rändern wird er Steine zersägen müssen und nicht alle Stücke verwenden können.
- Die Steine werden in Paketen, die eine bestimmte Anzahl Steine enthalten, geliefert. Der Gärtner wird ganze Pakete bestellen müssen.

Beispiel:
Für eine Fläche von 4000 cm^2 = 0.4 m^2 werden mehr als 20 Steine benötigt, obwohl 20 Steine (theoretisch) 4320 cm^2 bedecken könnten.



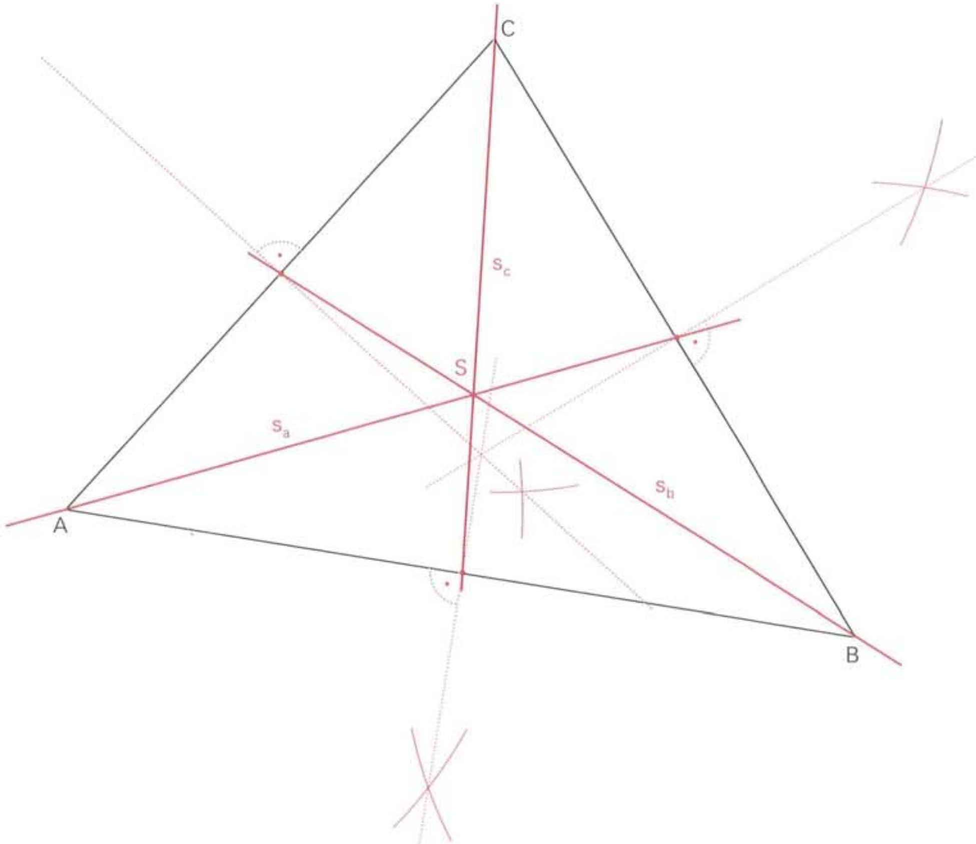
Das rot umrandete Rechteck hat einen Flächeninhalt von 33 cm · 120 cm = 3960 cm^2.
Der Gärtner wird die unten und oben wegzuschneidenden trapezförmigen Steinstücke kaum anderweitig verwenden können.
Die rot gefärbten Steinhälften wird er eventuell rechts (grau gefärbt) einsetzen können.

7.1 *Mögliche Antworten:*

a – Die drei eingezeichneten Verbindungsstrecken schneiden sich in einem Punkt.
– Die Strecken verbinden die Ecken mit den Seitenmittelpunkten.
Diese Strecken heissen **Schwerlinien.**

b Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der drei Schwerlinien, die bei der Aufgabe a gefunden wurden.

7.2 **a**

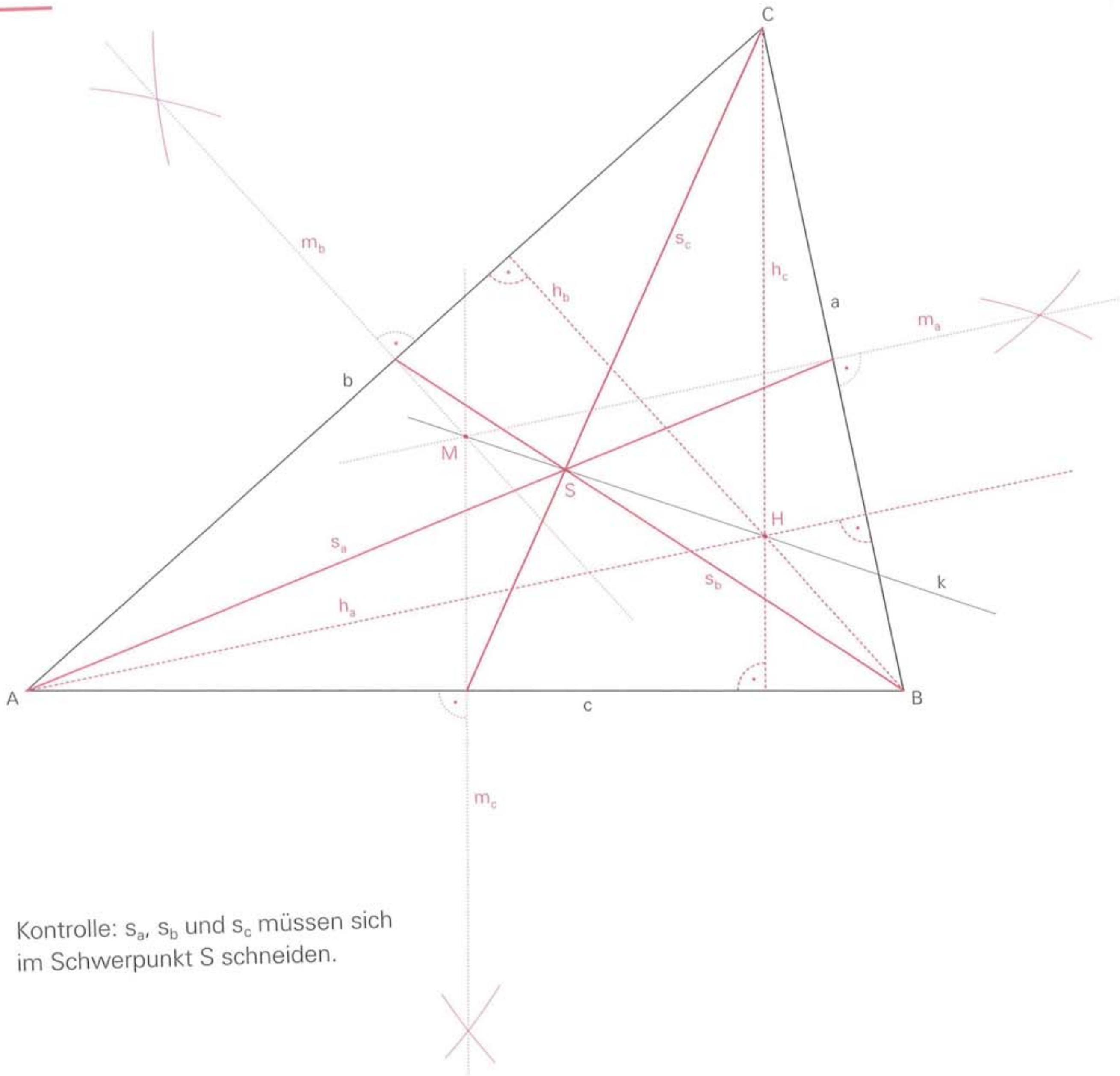


Kontrolle: s_a, s_b und s_c müssen sich im Schwerpunkt S schneiden.

b Siehe Lösung unter «Extras»

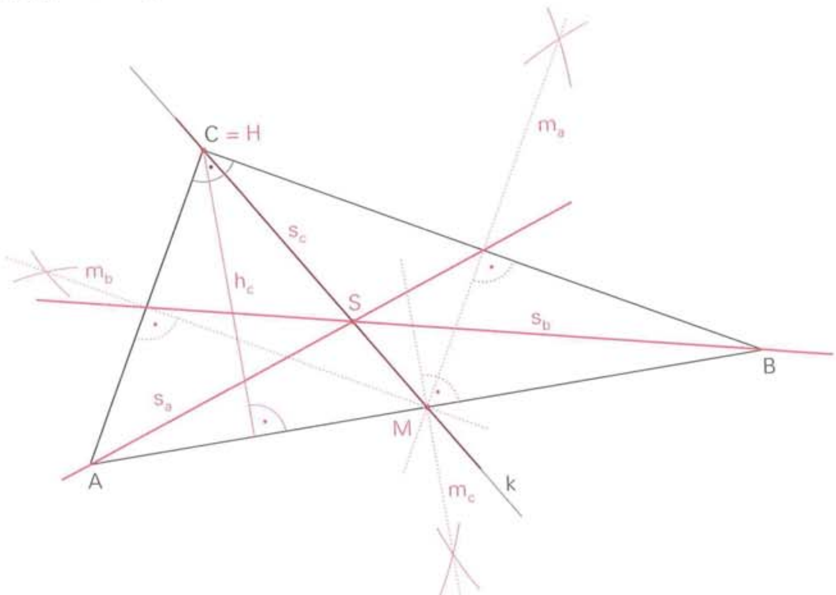
Schwerlinien im Dreieck

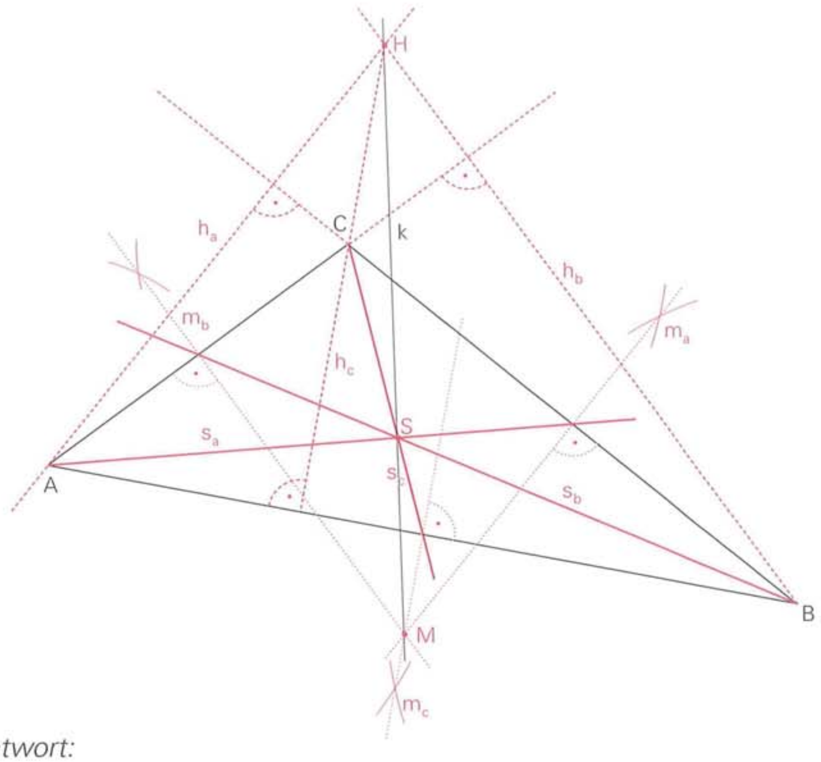
7.3 **a**



Kontrolle: s_a, s_b und s_c müssen sich im Schwerpunkt S schneiden.

b *Mögliche Antwort:*
Die drei Schnittpunkte M, S und H liegen auf einer Geraden, hier mit k (Kontrollgerade) bezeichnet.



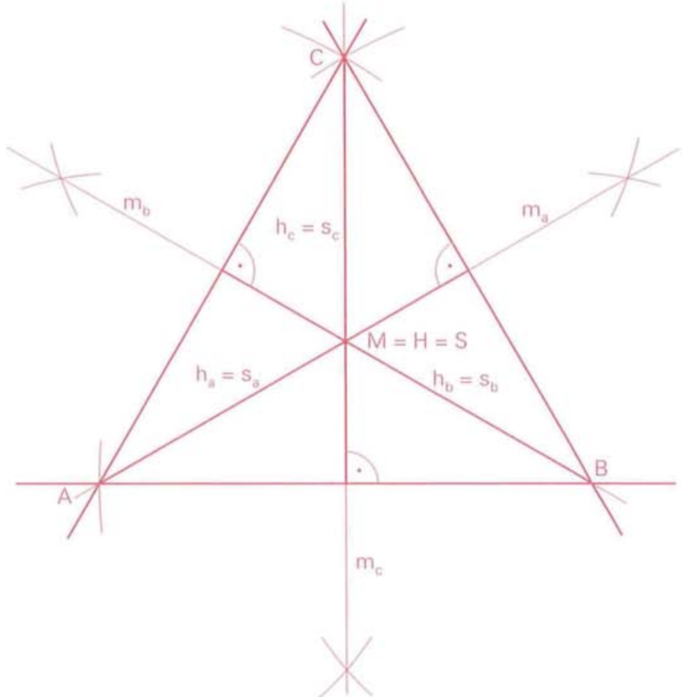


c *Mögliche Antwort:*
Auch bei stumpfwinkligen und rechtwinkligen Dreiecken liegen M, S und H auf einer Geraden.

Hinweis:
Bei rechtwinkligen Dreiecken fällt M mit dem Mittelpunkt der Seite zusammen, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, darum fällt die Kontrollgerade k auch mit einer Schwerlinie zusammen.

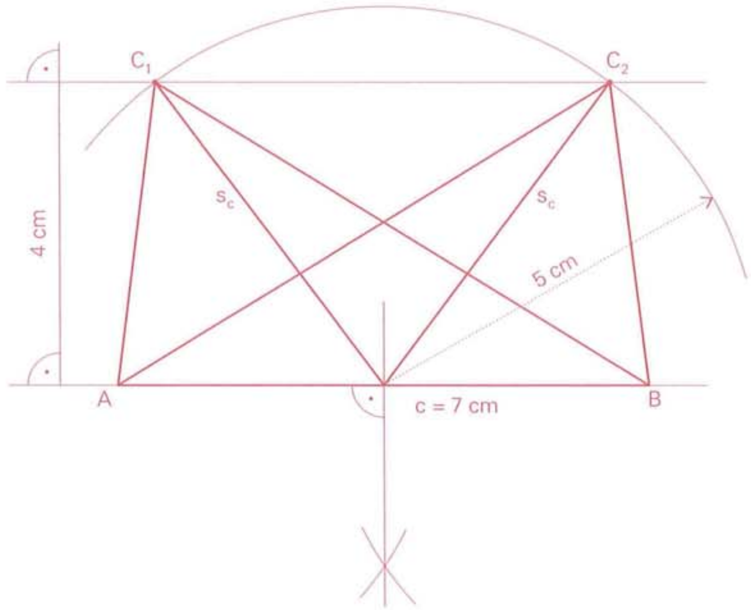
Anmerkung:
Die hier mit k bezeichnete Kontrollgerade heisst in der Geometrie Eulersche Gerade (nach Leonhard Euler, 1707–1783). Der Schwerpunkt S teilt die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis 2 zu 1.

7.4 **a**

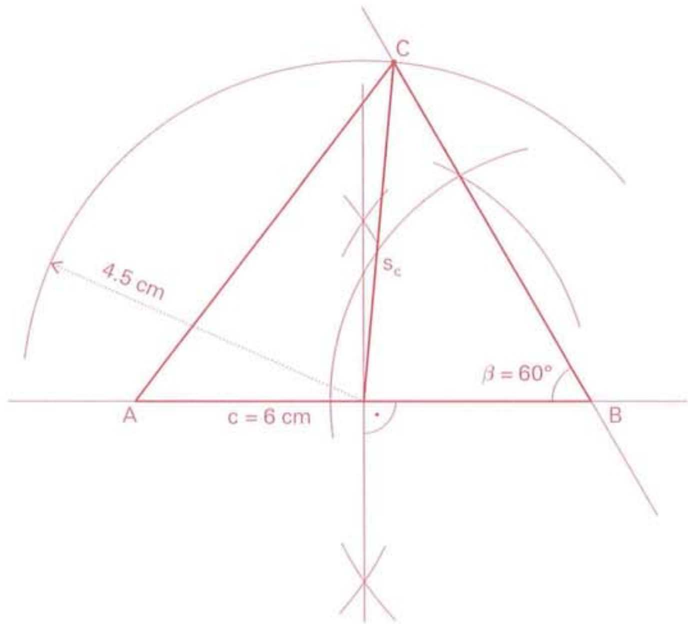


Mögliche Antwort:
Im gleichseitigen Dreieck liegen die Schwerlinien und die Höhen auf den Mittelsenkrechten.
Die drei Schnittpunkte der Schwerlinien, der Höhen und der Mittelsenkrechten fallen zusammen.

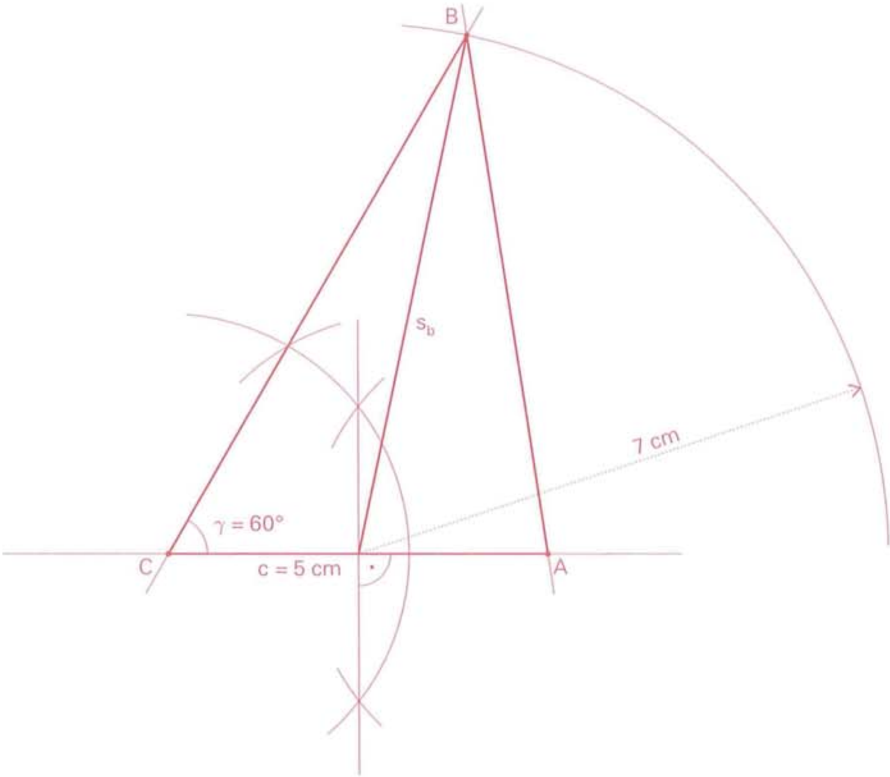
7.5 **a** *Hinweis:*
Zwei symmetrische Lösungen



b



c



d